Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Rémi Jaoui

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2021/2022

Bewertete Körper
Blatt 6
Abgabe: 07.12.2021

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**
Wir wissen, dass der Körper $\mathbb{Q}_7$ eine quadratische Wurzel von 2 der Form

$$3 + c_1 7 + c_2 7^2 + \dots$$

enthält. Bestimme die Werte c_1 und c_2 aus dem standard Repräsentantensystem $\{0, 1, \dots, 6\}$.

HINWEIS: Wenn $\alpha^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_7$, dann gilt $\alpha^2 \equiv 2 \mod 7^n$ für jedes n aus $\mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**
Betrachte eine Abbildung $w : R \to \Gamma \cup \{\infty\}$, wobei R ein Integritätsbereich und Γ eine angeordnete abelsche Gruppe derart sind, dass für alle a und b aus R:

- $w(a) = \infty \iff a = 0$.
- $w(ab) = w(a) + w(b)$.
- $w(a + b) \geq \min(w(a), w(b))$.

Zeige, dass die Abbildung w eine eindeutige Bewertung $\nu : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$, wobei K der Quotientenkörper von R ist, derart bestimmt, dass $\nu(a) = w(a)$ für a aus R.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Sei R ein Teilring des Körpers K.

(a) Gegeben einen Homomorphismus $\varphi : M \to M$ des endlich erzeugten R-Moduls M, zeige, dass $\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 = 0_{\mathrm{End}_R(M)}$ für ein n aus $\mathbb{N}$ und Elemente $a_0, \dots, a_{n-1}$ aus R.

Hinweis: Zeige, dass φ sich durch eine quadratische Matrix mit Koeffizienten aus R darstellen lässt und wende den klassichen Satz von Cayley-Hamilton im K-Vektorraum K^n an.

(b) Gegeben Elemente $b_1, \dots, b_n$ aus K, welche ganz über R sind, zeige, dass der Ring $R[b_1, \dots, b_n]$ ein endlich erzeugtes R-Modul ist.

(c) Sei nun $R \subset S \subset K$ eine Ringerweiterung, welche endlich erzeugt als R-Modul ist. Zeige, dass S ganz über R ist.

Hinweis: Wende (a) für den Ringhomomorphismus $\varphi : \begin{array}{ccc} S & \to & S \\ x & \mapsto & ax \end{array}$ mit a aus S an.

(d) Schließe daraus, dass es einen größten Teilring S von K gibt, namens *der ganze Abschluß von R in K*, welcher R enthält und ganz über R ist.

Hinweis: Ist die Summe zweier ganzen Elemente wiederum ganz?

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

Eine Untergruppe H der abelschen Gruppe $(G, +)$ ist *rein*, falls es für jedes n aus $\mathbb{N}$ und jedes h aus H ein h' aus H mit $nh' = h$ gibt, wenn es ein g in G mit $ng = h$ gibt.

(a) Falls G der Form $H \oplus K$ ist, zeige, dass H rein in G ist.

(b) Falls G torsionsfrei ist, zeige, dass H genau dann rein in G ist, wenn G/H torsionfrei ist.

(c) Sei nun $G = \mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Zeige, dass die reine Untergruppe $\mathbb{Q}$ von G nicht unter quadratische Wurzeln (additiv betrachtet) abgeschlossen ist.

(d) Wenn die abelsche Gruppe G torsionsfrei ist, zeige, dass die dividierbare Hülle der Untergruppe H

$$\mathrm{Div}_G(H) = \{g \in G \mid ng \text{ in } H \text{ liegt für ein } n \neq 0 \text{ aus } \mathbb{N}\}$$

die kleinste reine Untergruppe von G ist, welche H enthält.